1 Vereinfachende Voraussetzungen

- Phasensymmetrische Wicklungen werden vorausgesetzt, desgleichen Symmetrie des gesamten Maschinenaufbaues.
- Nur die (räumlichen) Grundwellen von Strombelägen, Felderregerkurven und Induktionsverteilungen werden berücksichtigt.
- Der zeitliche Verlauf aller Größen unterliegt keiner Einschränkung.
- Widerstände und Reaktanzen werden als konstante Parameter angenommen.
- Wirbelströme in massiven Eisenteilen sowie Eisen- und Reibungsverluste werden vernachlässigt.
- Stromverdrängungseffekte werden vernachlässigt.

2 Systematik der Formelzeichen

Großbuchstaben	Effektivwerte unbezogene, zeitliche Momentanwerte
Unterstrichene Großbuchstaben	komplexe Zeitzeiger
Kleinbuchstaben	bezogene reelle zeitliche Momentanwerte
Unterstrichene Kleinbuchstaben	komplexe Raumzeiger

<u>Verwendete Symbole</u>:

f	Frequenz
ω	Winkelgeschwindigkeit
t	Zeit
τ	Normierte Zeit; Zeitkonstante
s	Schlupf
p	Leistung; Polpaarzahl
m	Drehmoment
r	Ohm'scher Widerstand
x	Reaktanz
u	Spannung
i	Strom
ψ	Flußverkettung
γ	Verdrehwinkel (Stator gegen Rotor)
δ	Verdrehwinkel (SKS gegen Stator)
φ	zeitliche Phasenverschiebung
θ	unbezogenes Trägheitsmoment
σ	Streufaktor
κ	Koppelfaktor
β	Kehrwert einer Zeitkonstanten

<u>Verwendete Indizes</u>:

a, b, c	Statorstränge
A, B, C	Rotorstränge
S	Stator
R	Rotor
N	Nenn-
(K)	mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit rotierendes Koordinatensystem
(S)	statorfestes Koordinatensystem (SKS)
(R)	rotorfestes Koordinatensystem (RKS)
α	Realteil
β	Imaginärteil
m	mechanisch
el	elektrisch
L	Last-
v	Verlust-
μ	Magnetisierungs-
h	Haupt-
σ	Streu-
i	induziert
x*	konjugiert komplex

3 Verwendung normierter Größen

Als Bezugsgrößen werden verwendet:

- die Amplitude der Stator-Nennspannung (Strangspannung) $\sqrt{2} \cdot U_N$ für alle Spannungen
- die Amplitude des Stator-Nennstromes (Strangstrom) $\sqrt{2} \cdot I_N$ für alle Ströme
- die zur Nennspannung bei Nennfrequenz f_N gehörige Flußverkettung $\sqrt{2} \cdot U_N / \Omega_N$ für alle Flußverkettungen ($\Omega_N = 2\pi \cdot f_N$)
- die Impedanz U_N / I_N für alle Impedanzen
- das $1/2\pi$-fache der Periodendauer bei Nennfrequenz f_N für die Zeit.
  Die Zeit wird daher durch einen Winkel $\tau = \Omega_N \cdot t$ gemessen.
- die Nennscheinleistung $3 \cdot U_N \cdot I_N$ für alle Leistungen
- das der Nennscheinleistung und Synchrondrehzahl (bei Nennfrequenz) entsprechende Drehmoment für alle Drehmomente

4 Darstellung des Betriebszustandes einer Drehstrom-Asynchronmaschine durch komplexe Raumzeiger

Bei Speisung einer m-phasigen, symmetrisch aufgebauten Drehfeldwicklung mit m um T/m (T...Periodendauer) gegeneinander phasenverschobenen Wechselströmen entsteht ein rotierender Strombelag mit ausgeprägter Sinusgrundwelle.

Da Änderungen in axialer Richtung nicht berücksichtigt werden, kann diese Grundwelle durch einen Zeiger in der komplexen Ebene eindeutig beschrieben werden. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in der Drehachse der Maschine.

Bei der Beschreibung des Maschinenverhaltens sind drei spezielle Winkelgeschwindigkeiten des Koordinatensystems von Bedeutung:

- $\omega_K = 0$ SKS Statorfestes Koordinatensystem
- $\omega_K = \omega_S$ DKS Drehfeldfestes Koordinatensystem
- $\omega_K = \omega_m$ RKS Rotorfestes Koordinatensystem

In einem statorfesten Koordinatensystem werden die drei Stator-Strangströme i_a, i_b, i_c einer dreisträngigen Wicklung zu einem Statorstrom-Raumzeiger $\underline{i}_S$ zusammengefaßt.

Das entsprechende Koordinatensystem wird dabei durch einen in Klammern stehenden Zusatzindex gekennzeichnet: (S) ... statorfest, (R) ... rotorfest

$$\underline{i}_{S(S)} = \frac{2}{3} \cdot \left(i_a + \underline{a} \cdot i_b + \underline{a}^2 \cdot i_c \right) \tag{1}$$

$$\text{mit } \underline{a} = e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

Dies kann auch als formale Definition angesehen werden.

Die Auflösung der Definitionsgleichung für $\underline{i}_{S(S)}$ nach den Strangwerten liefert (unter Verwendung von $i_a + i_b + i_c = 0$):

$$i_a = \mathrm{Re}\left(\underline{i}_{S(S)}\right) \tag{3}$$

$$i_b = \mathrm{Re}\left(\underline{a}^2 \cdot \underline{i}_{S(S)}\right) \tag{4}$$

$$i_c = \mathrm{Re}\left(\underline{a} \cdot \underline{i}_{S(S)}\right) \tag{5}$$

Die Raumzeiger für Spannung und Flußverkettung werden in gleicher Weise festgelegt.

Analog können die Rotorstrangströme im rotorfesten Koordinatensystem zusammengefaßt werden:

$$\underline{i}_{R(R)} = \frac{2}{3} \cdot \left(i_A + \underline{a} \cdot i_B + \underline{a}^2 \cdot i_C\right) \tag{6}$$

Anhand eines mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit rotierenden Koordinatensystems wird die Umrechnung eines Raumzeigers $\underline{i}$ in ein anderes Koordinatensystem gezeigt:

Das statorfeste Koordinatensystem hat die Winkelgeschwindigkeit $\omega_K = 0$.

Das rotorfeste Koordinatensystem hat die Winkelgeschwindigkeit $\omega_K = \omega_m$.
Für den Verdrehwinkel γ gegen das statorfeste Koordinatensystem gilt: $\frac{d\gamma}{d\tau} = \omega_m(\tau)$

Ein beliebiges Koordinatensystem hat die Winkelgeschwindigkeit ω_K.
Für den Verdrehwinkel δ gegen das statorfeste Koordinatensystem gilt: $\frac{d\delta}{d\tau} = \omega_K(\tau)$

$$\underline{i}_{(K)} = \underline{i}_{(S)} \cdot e^{-j\delta} \qquad \underline{i}_{(K)} = \underline{i}_{(R)} \cdot e^{-j(\delta-\gamma)} \qquad \underline{i}_{(R)} = \underline{i}_{(S)} \cdot e^{-j\gamma}$$

Da die Winkelgeschwindigkeiten im allgemeinen Fall von der Zeit abhängig sind, ist bei der Bildung von (zeitlichen) Ableitungen die Produktregel zu beachten:

$$\frac{d\underline{i}_{(S)}}{d\tau} = \frac{d\underline{i}_{(K)}}{d\tau} \cdot e^{j\delta} + \underline{i}_{(K)} \cdot e^{j\delta} \cdot \left(j\frac{d\delta}{d\tau}\right) = \frac{d\underline{i}_{(K)}}{d\tau} \cdot e^{j\delta} + j\omega_K \cdot \underline{i}_{(K)} \cdot e^{j\delta}$$

5 Beschreibung des dynamischen Betriebsverhaltens einer Drehstrom-Asynchronmaschine durch Raumzeigergleichungen

5.1 Die Spannungsgleichungen

Ausgehend von der 2. Maxwellgleichung und unter Verwendung des Verbraucher-Zählpfeilsystemes gelangt man zur Spannungsgleichung eines Stranges der Maschine:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Psi_a}{dt} = R_S \cdot I_a - U_a \left| \cdot \frac{1}{U_N} \right. \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad u_a = r_S \cdot i_a + \frac{d\psi_a}{d\tau} \qquad \left| \cdot \frac{2}{3} \right. \tag{8}$$

Analog können die Spannungsgleichungen für die Stränge b und c angeschrieben werden:

$$u_b = r_S \cdot i_b + \frac{d\psi_b}{d\tau} \qquad \left| \cdot \frac{2}{3}\underline{a} \right. \tag{9}$$

$$u_c = r_S \cdot i_c + \frac{d\psi_c}{d\tau} \qquad \left| \cdot \frac{2}{3}\underline{a}^2 \right. \tag{10}$$

Addition der mit den angegebenen Faktoren multiplizierten Gleichungen (8) – (10) liefert die Statorspannungsgleichung in Raumzeigerdarstellung:

$$\underline{u}_{S(S)} = r_S \cdot \underline{i}_{S(S)} + \frac{d\underline{\psi}_{S(S)}}{d\tau} \tag{11}$$

Analog lautet die Rotorspannungsgleichung im rotorfesten Koordinatensystem:

$$\underline{u}_{R(R)} = r_R \cdot \underline{i}_{R(R)} + \frac{d\underline{\psi}_{R(R)}}{d\tau} \tag{12}$$

Transformiert man beide Spannungsgleichungen in ein gemeinsames Koordinatensystem, so gilt:

$$\underline{u}_{S(K)} = r_S \cdot \underline{i}_{S(K)} + \frac{d\underline{\psi}_{S(K)}}{d\tau} + j\omega_K \cdot \underline{\psi}_{S(K)} \tag{13}$$

$$\underline{u}_{R(K)} = r_R \cdot \underline{i}_{R(K)} + \frac{d\underline{\psi}_{R(K)}}{d\tau} + j(\omega_K - \omega_m) \cdot \underline{\psi}_{R(K)} \tag{14}$$

Die praktisch wichtigen Sonderfälle für das statorfeste, das rotorfeste und das drehfeldfeste Koordinatensystem findet man durch Einsetzen der speziellen Werte für ω_K.

5.2 Die Flußverkettungsgleichungen

Die aus der Überlagerung der Felderreger-Grundwellen von Stator und Rotor resultierende Summendurchflutung ruft den magnetischen Hauptfluß hervor:

$$\underline{i}_{\mu(K)} = \underline{i}_{S(K)} + \underline{i}_{R(K)} \tag{15}$$

$$\underline{\psi}_h = x_h \cdot \underline{i}_\mu \tag{16}$$

Weiters wird angenommen, daß jeweils nur von Stator- bzw. Rotorstrom abhängige Streuflüsse existieren:

$$\underline{\psi}_{S\sigma} = x_{S\sigma} \cdot \underline{i}_S \tag{17}$$

$$\underline{\psi}_{R\sigma} = x_{R\sigma} \cdot \underline{i}_R \tag{18}$$

Damit erhält man die totalen Flußverkettungen:

$$\underline{\psi}_S = \underline{\psi}_h + \underline{\psi}_{S\sigma} = x_S \cdot \underline{i}_S + x_h \cdot \underline{i}_R \tag{19}$$

$$\underline{\psi}_R = \underline{\psi}_h + \underline{\psi}_{R\sigma} = x_h \cdot \underline{i}_S + x_R \cdot \underline{i}_R \tag{20}$$

Dabei gilt:

$$x_S = x_h + x_{S\sigma} \tag{21}$$

$$x_R = x_h + x_{R\sigma} \tag{22}$$

5.3 Das elektromagnetisch entwickelte Drehmoment; die Bewegungsgleichung

Das von der Maschine entwickelte Drehmoment kann aus einer Leistungsbilanz abgeleitet werden; die elektrische Momentanleistung:

$$P(t) = U_a \cdot I_a + U_b \cdot I_b + U_c \cdot I_c + U_A \cdot I_A + U_B \cdot I_B + U_C \cdot I_C \tag{23}$$

wird auf die Nennscheinleistung $S_N = 3 \cdot U_N \cdot I_N$ bezogen:

$$p(\tau) = \frac{2}{3}\left(u_a \cdot i_a + u_b \cdot i_b + u_c \cdot i_c + u_A \cdot i_A + u_B \cdot i_B + u_C \cdot i_C\right) \tag{24}$$

Mit Hilfe von Raumzeigern ausgedrückt lautet die bezogene Momentanleistung:

$$p(\tau) = \mathrm{Re}\left(\underline{u}_S \cdot \underline{i}_S^* + \underline{u}_R \cdot \underline{i}_R^*\right) \tag{25}$$

Die Momentanleistung läßt sich in drei Anteile aufspalten:

$$p(\tau) = p_v(\tau) + p_\mu(\tau) + p_m(\tau) \tag{26}$$

$p_v(\tau)$ ... in Stator und Rotor umgesetzte Verlustleistung
$p_\mu(\tau)$ ... Änderung der gespeicherten magnetischen Energie
$p_m(\tau)$ ... mechanisch umgesetzte Leistung

Durch Einsetzen der Spannungsgleichungen erhält man:

$$p(\tau) = \mathrm{Re}\left(r_S \cdot \underline{i}_S \cdot \underline{i}_S^* + r_S \cdot \underline{i}_R \cdot \underline{i}_R^*\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{d\underline{\psi}_S}{d\tau} \cdot \underline{i}_S^* + \frac{d\underline{\psi}_R}{d\tau} \cdot \underline{i}_R^*\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots + \mathrm{Re}\left(j\omega_K \cdot \left(\underline{\psi}_S \cdot \underline{i}_S^* + \underline{\psi}_R \cdot \underline{i}_R^*\right)\right) - \mathrm{Re}\left(j\omega_m \cdot \underline{\psi}_R \cdot \underline{i}_R^*\right) \tag{27}$$

Durch Umformen des dritten Terms findet man:

$$\mathrm{Re}\left(j\omega_K \cdot \left(\underline{\psi}_S \cdot \underline{i}_S^* + \underline{\psi}_R \cdot \underline{i}_R^*\right)\right) = \mathrm{Re}\left(j\omega_K \cdot \underline{\Gamma}\right)$$

$$\underline{\Gamma} = \left(x_S \cdot \underline{i}_S + x_h \cdot \underline{i}_R\right) \cdot \underline{i}_S^* + \left(x_h \cdot \underline{i}_S + x_R \cdot \underline{i}_R\right) \cdot \underline{i}_R^* = \quad \Rightarrow \underline{\Gamma} \text{ ist rein reell.} \Rightarrow \mathrm{Re}\left(j\omega_K \cdot \underline{\Gamma}\right) = 0$$

$$\ldots\ldots x_S \cdot \underline{i}_S \cdot \underline{i}_S^* + x_R \cdot \underline{i}_R \cdot \underline{i}_R^* + x_h \cdot \left(\underline{i}_R \cdot \underline{i}_S^* + \left(\underline{i}_R \cdot \underline{i}_S^*\right)^*\right)$$

Der Vergleich der beiden Ausdrücke für die Momentanleistung ergibt daher:

$$p_v(\tau) = \mathrm{Re}\left(r_S \cdot \underline{i}_S \cdot \underline{i}_S^* + r_S \cdot \underline{i}_R \cdot \underline{i}_R^*\right)$$

$$p_\mu(\tau) = \mathrm{Re}\left(\frac{d\underline{\psi}_S}{d\tau} \cdot \underline{i}_S^* + \frac{d\underline{\psi}_R}{d\tau} \cdot \underline{i}_R^*\right) \tag{28}$$

$$p_m(\tau) = -\mathrm{Re}\left(j\omega_m \cdot \underline{\psi}_R \cdot \underline{i}_R^*\right)$$

Die mechanische Leistung kann auch in Statorgrößen ausgedrückt werden:

$$p_m(\tau) = -\mathrm{Re}\left(j\omega_m \cdot \left(x_h \cdot \underline{i}_S + x_R \cdot \underline{i}_R\right) \cdot \underline{i}_R^*\right) \tag{29}$$

Da $\underline{i}_R \cdot \underline{i}_R^*$ reell ist, gilt $\mathrm{Re}\left(j\omega_m \cdot x_R \cdot \underline{i}_R \cdot \underline{i}_R^*\right) = 0$ und daher:

$$p_m(\tau) = -\mathrm{Re}\left(j\omega_m \cdot x_h \cdot \underline{i}_S \cdot \underline{i}_R^*\right) \tag{30}$$

Da $\underline{i}_S \cdot \underline{i}_S^*$ reell ist, kann zu $x_h \cdot \underline{i}_R^*$ der Term $x_S \cdot \underline{i}_S^*$ addiert werden:

$$p_m(\tau) = -\mathrm{Re}\left(j\omega_m \cdot \underline{i}_S \cdot \underline{\psi}_S^*\right) = \mathrm{Im}\left(\omega_m \cdot \underline{i}_S \cdot \underline{\psi}_S^*\right) = \omega_m \cdot m_{el} \tag{31}$$

$$\Rightarrow m_{el} = \mathrm{Im}\left(\underline{i}_S \cdot \underline{\psi}_S^*\right) \tag{32}$$

Durch Verwendung der Bezugsgrößen für das Drehmoment und die Zeit erhält man die Bewegungsgleichung in bezogener Darstellung:

$$\Theta \cdot \frac{d\Omega_m}{dt} = M_{el} - M_L \tag{33}$$

$$M_{S,N} = \frac{3 \cdot U_N \cdot U_N}{\Omega_S / p} \qquad \tau_m = \Omega_N \cdot T_M = \Omega_N \cdot \Theta \cdot \frac{\Omega_{m,N}}{M_{S,N}} \tag{34}$$

$$\tau_m \cdot \frac{d\omega_m}{d\tau} = m_{el} - m_L \tag{35}$$

5.4 Das vollständige Gleichungssystem

In einem mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit ω_K rotierenden Koordinatensystem lauten die Gleichungen der Asynchronmaschine:

$$
\begin{aligned}
&\underline{u}_S = r_S \cdot \underline{i}_S + \frac{d\underline{\psi}_S}{d\tau} + j\omega_K \cdot \underline{\psi}_S \\
&\underline{u}_R = r_R \cdot \underline{i}_R + \frac{d\underline{\psi}_R}{d\tau} + j(\omega_K - \omega_m) \cdot \underline{\psi}_R \\
&\underline{\psi}_S = x_S \cdot \underline{i}_S + x_h \cdot \underline{i}_R \\
&\underline{\psi}_R = x_h \cdot \underline{i}_S + x_R \cdot \underline{i}_R \\
&\tau_m \cdot \frac{d\omega_m}{d\tau} = m_{el} - m_L \\
&m_{el} = \mathrm{Im}\left(\underline{i}_S \cdot \underline{\psi}_S^*\right)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Um die Ströme aus den Flußverkettungen zu berechnen, werden die invertierten Flußverkettungsgleichungen benötigt:

$$
\begin{aligned}
&\underline{i}_S = +\frac{1}{\sigma \cdot x_S} \cdot \underline{\psi}_S - \frac{\kappa}{\sigma \cdot x_h} \cdot \underline{\psi}_R \\
&\underline{i}_R = -\frac{\kappa}{\sigma \cdot x_h} \cdot \underline{\psi}_S + \frac{1}{\sigma \cdot x_R} \cdot \underline{\psi}_R
\end{aligned}
\tag{37}
$$

wobei der totale Streufaktor wie folgt definiert ist:

$$\sigma = 1 - \kappa = 1 - \frac{x_h^2}{x_S \cdot x_R} \tag{38}$$

6 Das Nullsystem

Im allgemeinen Fall ist das speisende System von Wechselströmen wie in Kapitel 4 angenommen nicht mehr symmetrisch, die Summe der Ströme ist nicht mehr = 0:

$$i_0 = \frac{1}{3} \cdot (i_a + i_b + i_c) \tag{39}$$

Das Nullsystem liefert jedoch keinen Beitrag zum Raumzeiger:

$$i_0 + \underline{a} \cdot i_0 + \underline{a}^2 \cdot i_0 = 0 \tag{40}$$

Das Nullsystem hat keine Wirkung auf das Hauptfeld und bewirkt nur parasitäre Effekte. Es ist daher getrennt zu behandeln und bei Rücktransformation zu addieren:

$$u_0 = r_S \cdot i_0 + \frac{d\psi_0}{d\tau} \tag{41}$$

$$i_a = i_0 + \mathrm{Re}\left(\underline{i}_{S(S)}\right) \tag{42}$$